

受 験 番 号					

東京大学大学院新領域創成科学研究科
環境学研究系 海洋技術環境学専攻
平成 30（2018）年度大学院入学試験問題
修士課程・博士後期課程共通

専門基礎科目
「論理的思考能力を見るための数理的問題」
入学試験問題及び解答用紙

平成 29（2017）年 8 月 21 日（月）9:30～11:00（90 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあった場合には挙手し、試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい。それ以外の箇所に受験番号、氏名を書いてはいけません。
4. 問題は全部で 9 問あります。9 問全てに解答しなさい。
5. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き、四角の中に答を記入しなさい。
6. 計算用紙は別に配布します。

第 1 問

実数の独立変数 x, y で複素数 $z = x + iy$ を定義する。ここに、 i は虚数単位である。また、正則関数 $w = f(z)$ の実部と虚部を、それぞれ $u(x, y), v(x, y)$ とする。

$$u(x, y) = (x + 2)\{(x + 2)^2 - 3y^2\}$$

の時の $v(x, y)$ を求めよ。



第2問

A は実数を成分とする 2×2 の行列、 p 、 q 、 r 、 s は実数で

$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ は零ベクトルではないとする。

$A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ 、 $A \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ が成り立つとき、

(1) $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ は逆行列を持つことを証明せよ。

(2) A^2 を求めよ。

第 3 問

あるスーパーマーケットでは、カート置き場が東口、中央口、西口の3か所にある。買い物客は、どの置き場からカートを借り、どの置き場に返却してもよい。台数の変化を調べたところ、1日が終わった後に、東口のカートは1割が中央口に、1割が西口に、中央口のカートは3割が東口に、2割が西口に、西口のカートは2割が東口に、1割が中央口に移動することがわかった。240台のカートがあるとき、全ての置き場で台数が変わらないようにするためには、どのような配分で置けばよいか。

--

第 4 問

以下の行列 A を、対称行列 P ($P = P^t$) と交代行列 Q ($Q = -Q^t$) の和で表わした時の P , Q を求めよ。ここに、 P^t , Q^t は、それぞれ P , Q の転置行列である。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$P =$

$Q =$

第 5 問

1 辺の長さが 1 の正方形に内接する正三角形を考える。

(1) 上述の正三角形の面積が最大となる場合を図示せよ。



(2) 最大となる面積を求めよ。



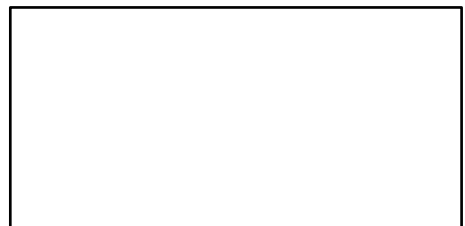
第 6 問

O, A, B, C を頂点とする 4 面体の 3 つの線分 OA, OB, OC が互いに直交し、それぞれの長さが a, b, c であるとき、頂点 O から平面 ABC へ下ろした垂線の長さを求めよ。



第 7 問

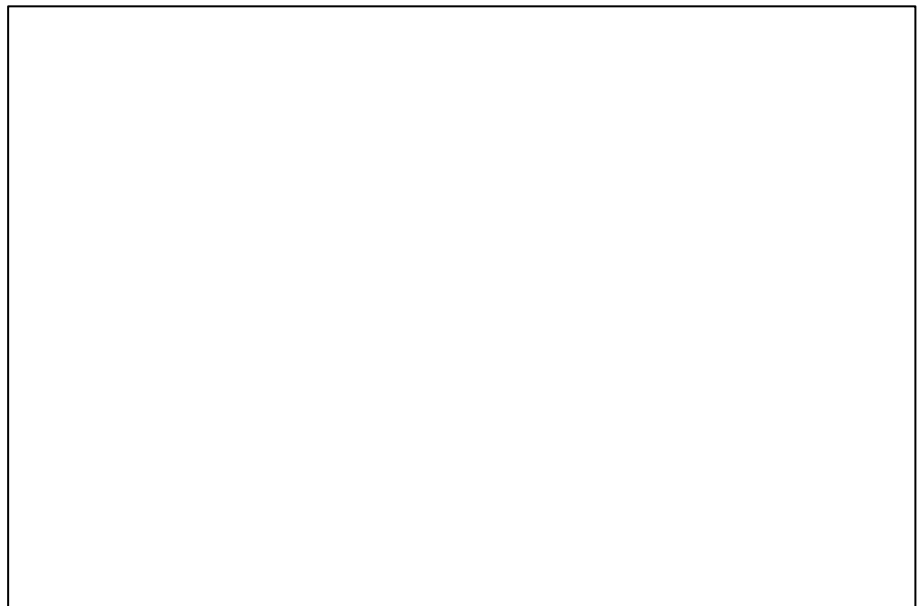
ある船が真っ直ぐに進み港Aから港Bに到着し、すぐに同じルートで港Bから港Aに戻ってくる。この往復の間、無風では船の速度は一定である。つぎに、風が港Aから港Bに向かって吹いているとき、船の速度は無風の場合よりも、ある速度だけ追い風では増加し、向かい風では同じ速度だけ減少する。風がある場合、無風の時に比べ往復時間は、(1) 増える、(2) 減る、(3) 同じ、のうちいずれであるか。なお速度は対地速度とする。



第 8 問

列車 A が、時刻 T_0 から T_0+T 分の間にランダムに駅に到着し、 α 分間停車する。列車 B は同じ時間帯に、列車 A とは独立に、ランダムに駅に到着し、 β 分間停車する。ただし、列車の到着時刻の確率分布は一様である。

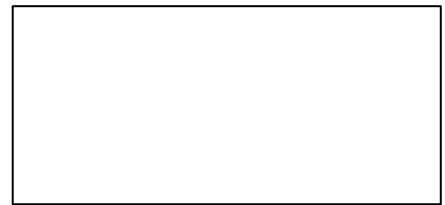
- (1) 列車 B の前に列車 A が駅に到着する確率を求めよ。
- (2) 2 つの列車 A と B が駅で出会う確率を求めよ。
- (3) 列車 A と B が駅で出会ったとき、列車 B の前に列車 A が駅に到着している確率を求めよ。



第 9 問

a, b, c を自然数とする。

1) $a + b + c = 20$ となる (a, b, c) の組は何通りか。



2) $a + b + c \leq 20$ となる (a, b, c) の組は何通りか。



受 験 番 号					

東京大学大学院新領域創成科学研究科
環境学研究系 海洋技術環境学専攻
平成 31（2019）年度大学院入学試験問題
修士課程・博士後期課程共通

専門基礎科目
「論理的思考能力を見るための数理的問題」
入学試験問題及び解答用紙

平成 30（2018）年 8 月 20 日（月）9:30～11:00（90 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあった場合には挙手し、試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい。それ以外の箇所に受験番号、氏名を書いてはいけません。
4. 問題は全部で 9 問あります。9 問全てに解答しなさい。
5. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き、四角の中に答を記入しなさい。
6. 計算用紙は別に配布します。

第1問

実数 a, b が $a+2b=10$ を満たすとき、 $2^a + 16^b$ の最小値を求めよ。



第2問

以下の定積分の値を求めよ。

(1)

$$\int_0^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx$$

(2)

$$\int_1^e (x + x^{-1}) dx$$

第3問

A 、 h を正の実数とし、 a と b を以下の式の異なる正の実数根とする。

$$A = x \tan(hx)$$

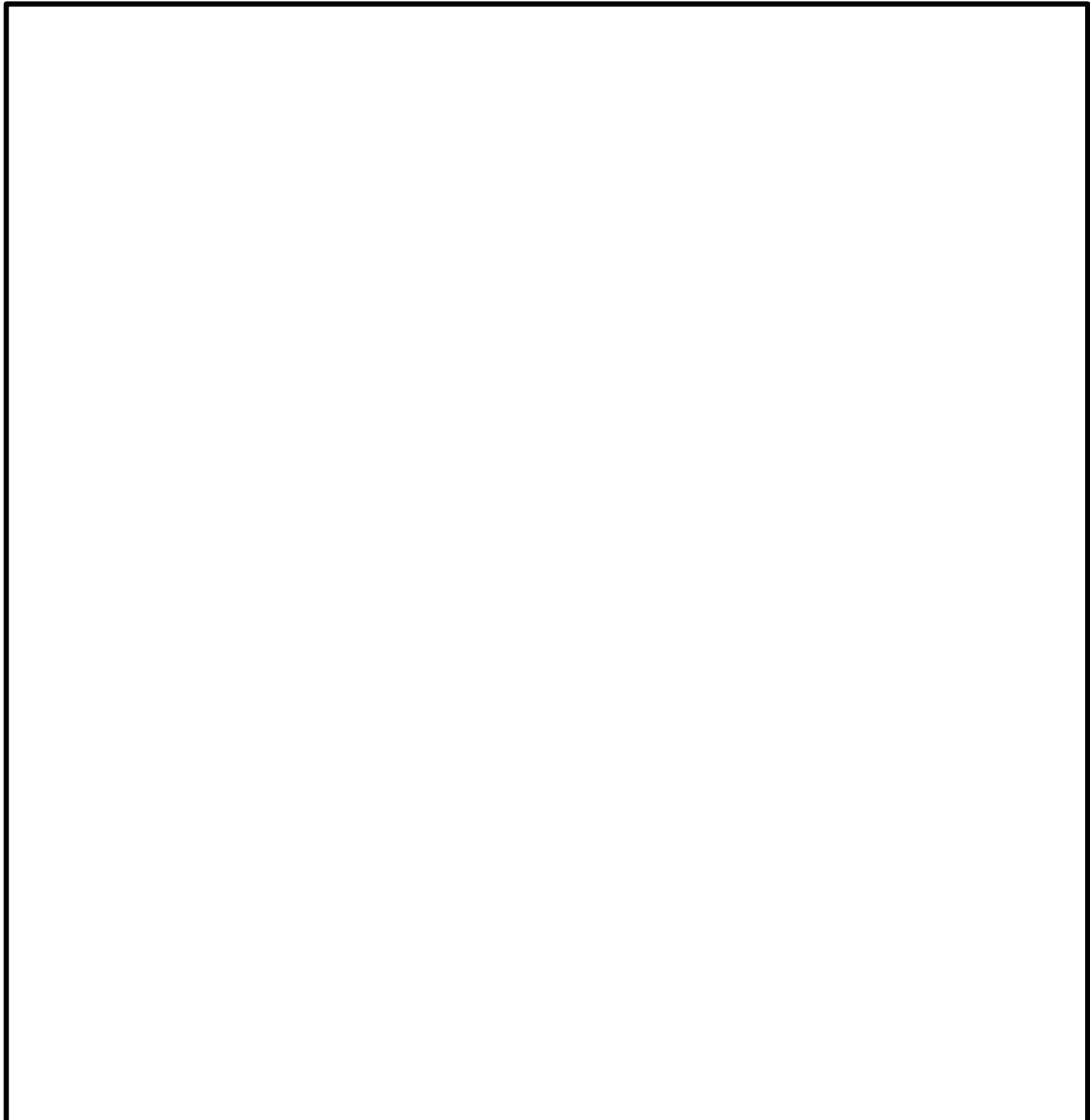
関数 $f_a(x)$ と $f_b(x)$ が次式のように定義される時、

$$f_a(x) = \cos(a(x - h))$$

$$f_b(x) = \cos(b(x - h))$$

以下の定積分を求めよ。

$$I_{ab} = \int_0^h f_a(x) f_b(x) dx$$



第4問

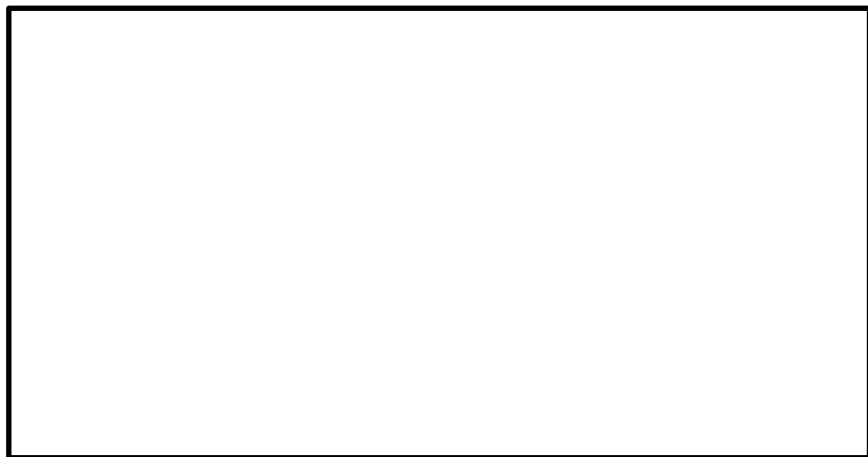
次の行列について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ。



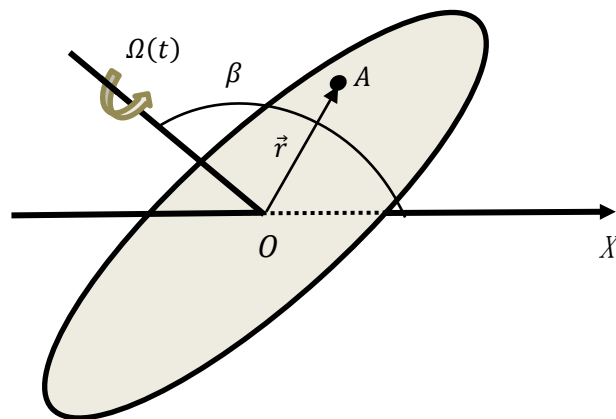
(2) 固有ベクトルを求めよ。



第5問

空間に固定された X 軸に対して角度 β をなす回転軸の周りを角速度 $\Omega(t)$ で回転する円盤がある。ここで、 t は時間である。円盤の回転中心は空間固定座標($O - XYZ$)の原点と一致する。また、円盤上に固定された A 点の位置ベクトルを $\vec{r}$ とする。

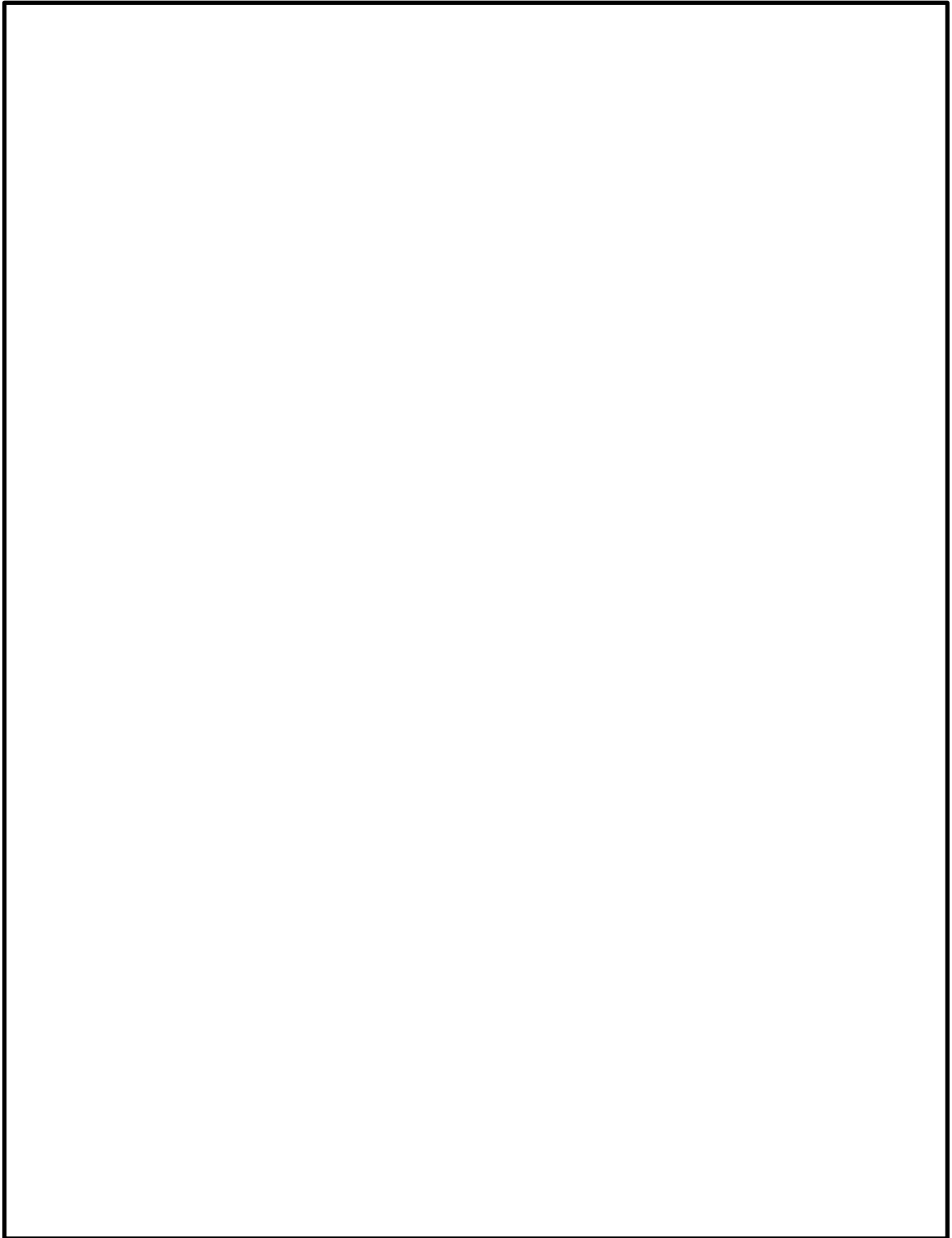
A 点の加速度ベクトルを空間固定座標($O - XYZ$)の基底 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ を用いて表せ。ただし、空間固定座標系の Y 軸、 Z 軸は回答が簡潔に書けるように定義せよ。



第6問

△ABC について、次の等式が成り立つことを証明しなさい。ただし、 a, b, c はそれぞれ辺 BC、CA、AB の長さで、 θ は $\angle CAB$ の角度である。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$



第7問

互いに異なる正の整数の書かれたカードが3枚ある。A、B、Cの3人がこのカードを1枚ずつランダムに選び、カードに書かれた数を自分の得点とするゲームを行った。このゲームを複数回行った後、A、B、Cそれぞれが取得した得点の合計はそれぞれ10点、8点、18点であった。なお、Bは2回目のゲームでA、Cよりも高い得点のカードを選んだことが分かっている。このとき、1回目のゲームにおいて3人の中で2番目に高い得点のカードを選んだのは誰か、理由とともに答えなさい。

第8問

ある整数 N は、5 進法で abc と 3 桁で記述され、3 進法で $cdee$ と 4 桁で記述される。ただし a と c は 1 以上の整数、 b と d と e は 0 以上の整数である。このような条件を満たす N, a, b, c, d, e の組合せを、10 進法の表記ですべて示せ。

第9問

海底掘削を行う掘削船は、測位システムからの位置情報をもとに、複数のスラストを制御することで位置保持している。合計6基のスラストと1つの測位システムを備えた掘削船を想定する。この掘削船は2基以上のスラストが故障すると位置保持能力を喪失する。ここで、それぞれのスラストが故障する確率を p 、測位システムが故障する確率を q としたとき、以下の確率を求めよ。

- (1) 測位システムが故障していないとき、スラストが故障し掘削船が位置保持能力を喪失する確率

- (2) 掘削船が位置保持能力を維持できる確率

受 験 番 号					

東京大学大学院新領域創成科学研究科
環境学研究系 海洋技術環境学専攻
令和 2（2020）年度大学院入学試験問題
修士課程・博士後期課程共通

専門基礎科目
「論理的思考能力を見るための数理的問題」
入学試験問題及び解答用紙

令和元（2019）年 8 月 19 日（月） 9:30～11:00（90 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあった場合には挙手し、試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい。それ以外の箇所に受験番号、氏名を書いてはいけません。
4. 問題は全部で 9 問あります。9 問全てに解答しなさい。
5. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き、四角の中に答を記入しなさい。
6. 計算用紙は別に配布します。

第1問

次の定積分を求めよ。

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$



第2問

整数 m 、任意の実数 θ について、変数 x 、 y を以下のように定義する。

$$\begin{cases} x(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} \\ y(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{cases}$$

ただし $m! \equiv m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 、 $0! = 1$ 、 $0^0 = 1$ である。
このとき、以下の問いに答えよ。

- 1) $\frac{dx}{dy}$ を x 、 y で表せ。



- 2) x 、 y の満たす関係を求めよ。



第3問

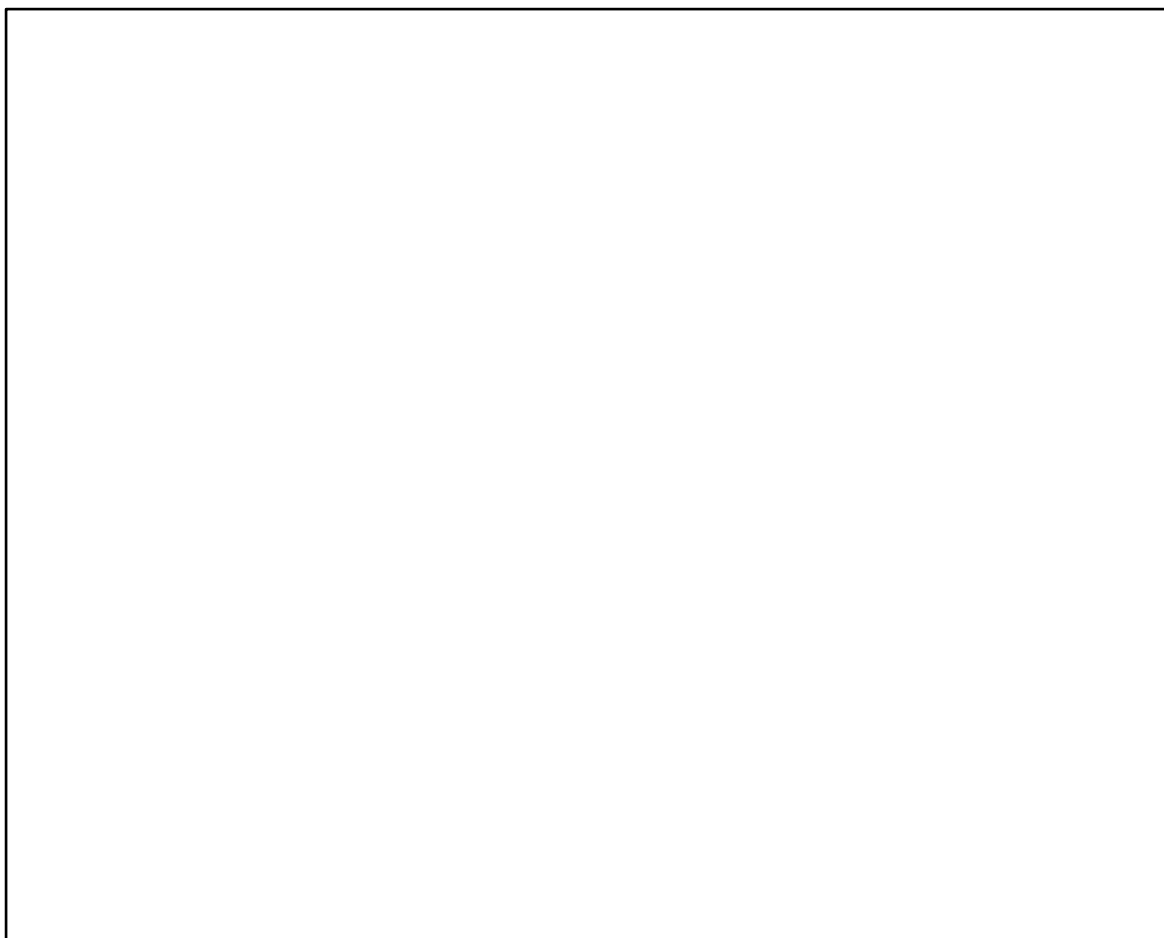
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

1) A^{-1} を求めよ。

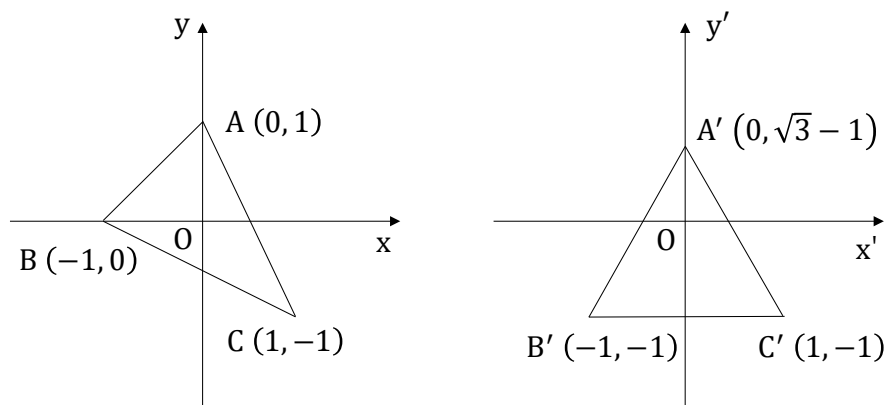


2) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ となることを示せ。



第4問

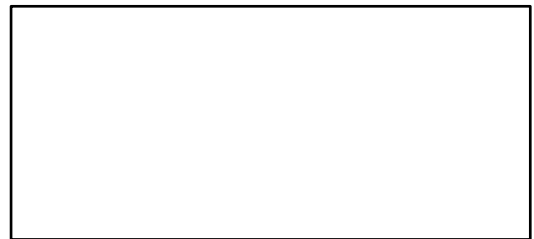
座標系 Oxy 上の三角形 ABC が、座標系 $Ox'y'$ 上の三角形 $A'B'C'$ に変換された。この時、座標系 Oxy 上の任意の点 $\vec{x}$ から座標系 $Ox'y'$ 上の点 $\vec{x}'$ への変換を求めよ。



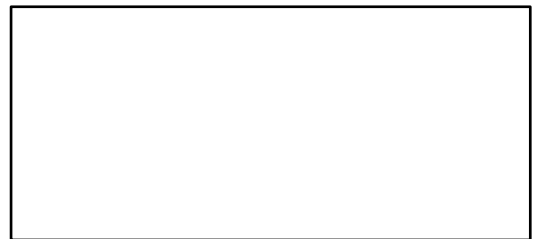
第5問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。ただし a は実数で、
 $0 < a < 1$ とする。

1) 固有値、固有ベクトルを求めよ。



2) A^n を求めよ。ただし、 n は自然数である。



3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ。



第6問

A, B, C の3つの部屋があり、ある猫はブザーが鳴るたびに部屋を移動または留まるものとする。猫がAにいる場合に、ブザーが鳴った後にA, B, Cにいる確率はそれぞれ0.4, 0.6, 0.0である。同様に猫がBにいる場合に、ブザーが鳴った後にA, B, Cにいる確率はそれぞれ0.2, 0.5, 0.3、猫がCにいる場合に、ブザーが鳴った後にA, B, Cにいる確率はそれぞれ0.1, 0.7, 0.2である。

- 1) はじめにAにいた猫が3回目のブザーが鳴った後にA, B, Cの部屋にいる確率をそれぞれ求めよ。

--

- 2) 十分に大きい回数ブザーが鳴った時に、猫がA, B, Cの部屋にいる確率をそれぞれ求めよ。

--

第7問

ある機械部品を4つの箱に分けて保管する。箱1には2000個の部品が入っていて、その中の5%が不良品である。箱2には500個の部品が入っていて、その中の40%が不良品である。他の2つの箱にはそれぞれ1000個の部品が入っていて、それぞれその中に10%の不良品があるとする。

- 1) 4つの箱からランダムに一つ箱を選び、その中からランダムに1個の部品を取り出したとき、それが不良品である確率を求めよ。



- 2) 1) で選んだ部品が不良品であったとき、それが箱2から取り出された確率を求めよ。



- 3) 4つの箱からそれぞれ一つずつランダムに部品を取り出す。取り出された4つの部品に少なくとも一つ不良品がある確率を求めよ。



第8問

容積が12リットル、7リットル、5リットルの目盛の無い容器がそれぞれ一つずつある。はじめ12リットルの容器は水で満たされており、7リットルと5リットルの容器は空である。一つの容器に6リットルちょうどの水を入れるにはどうすればよいか手順を説明せよ。

第9問

p が素数のとき、 $(p-1)!+1$ は p で割り切れる。これを利用して以下を求めよ。
ただし正の整数 m について $m! \equiv m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ である。

1) $9!$ を11で割ったときの余り

2) $58!$ を61で割ったときの余り

受験番号					
Examinee's number					

東京大学大学院新領域創成科学研究科 海洋技術環境学専攻
令和 4（2022）年度大学院入学試験問題（修士課程・博士後期課程）

Department of Ocean Technology, Policy, and Environment
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo
Academic Year 2022 Entrance Examination for Master Course and Doctoral Course

専門科目

「専門基礎科目（論理的思考能力や数理的能力を問う問題）」

Specialized Subjects

“Fundamental Specialized Subject (Problems designed to evaluate logical thinking and basic mathematical skills)”

令和 3（2021）年 8 月 16 日（月）9:30～11:00（90 分）

August 16 (Mon), 2021 9:30～11:00（90min.）

注意事項 Notice

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
Do not open this test book until the start of the examination.
2. 対面受験者はこの表紙にも受験番号を記入しなさい。
Write your examinee number on this test book if you are an on-site examinee.
3. 問題は全部で 6 問あります。6 問全てに解答しなさい。
There are 6 questions in total. Answer all of the 6 questions.
4. 問題の解答の道筋と答を記入し、答を四角で囲みなさい。
Include your written derivation for your solution and enclose the answer in a box.
5. 対面受験者には計算用紙を別に配布する。
Sheets for calculation are distributed separately for on-site examinees.

オンライン受験者用 For online examinee

1. 解答は必ず受験者本人が作成し、問題と解答を他人に漏洩しないこと。
Answers must be prepared by the examinee him/herself and do not leak the written test questions and answers to others.
2. 一頁につき一問を解答すること。それぞれの解答用紙の左上に受験番号と解答する問題番号を記入しなさい。
Answer only one question per page. At the top left of each answer sheet, write your examinee's number and the corresponding question number.
3. 解答は指示に従ってアップロードすること。
Upload your answers according to the online instructions.

第 1 問

以下の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(x) \cos(x) dx$$

Q1

Obtain the value of the following definite integral.

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(x) \cos(x) dx$$

第2問

$O-xyz$ 座標系上に点 A 、 B 、 C がそれぞれ $(4,5,7)$ 、 $(2,1,3)$ 、 $(9,7,6)$ で与えられるとき、以下を求めよ。

- (1) 三角形 OAB の面積
- (2) 四面体 $OABC$ の体積

Q2

Find the following, when points A , B and C are given on the $O-xyz$ coordinate system by $(4,5,7)$, $(2,1,3)$ and $(9,7,6)$, respectively.

- (1) Area of triangle OAB
- (2) Volume of tetrahedron $OABC$

第 2 問 解答用紙 Q2 Answer sheet

第3問

観測点 O から 200 メートル離れた同じ水平面上にある地点 P から、鉛直に毎分 25 メートルの速度で風船を上げる。風船の位置を B とし、観測点から風船を見上げた角度を $\angle BOP$ とする。風船が地点 P から 100 メートルの高さに達したとき、 $\angle BOP$ の時間変化率を求めよ。ただし、風船の大きさは考えない。

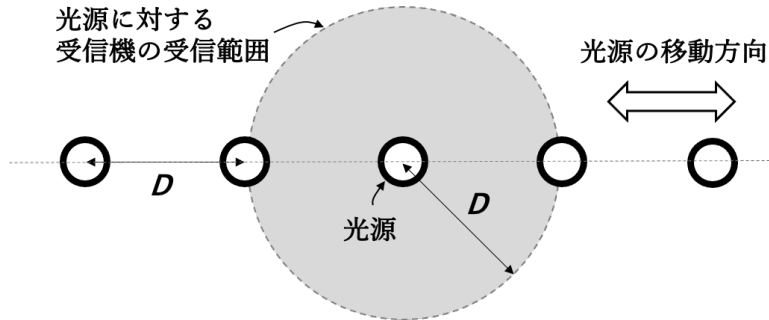
Q3

A balloon rises vertically at the speed of 25 meters per minute from the point P , which is 200 meters away from the observation point O on the same horizontal plane. When the balloon reaches the height of 100 meters from the point P , find the rate of change in time of $\angle BOP$ which is the angle of looking up at the balloon from the observation point O . Assume, B is the balloon position and the size of the balloon is negligible.

第3問 解答用紙 Q3 Answer sheet

第4問

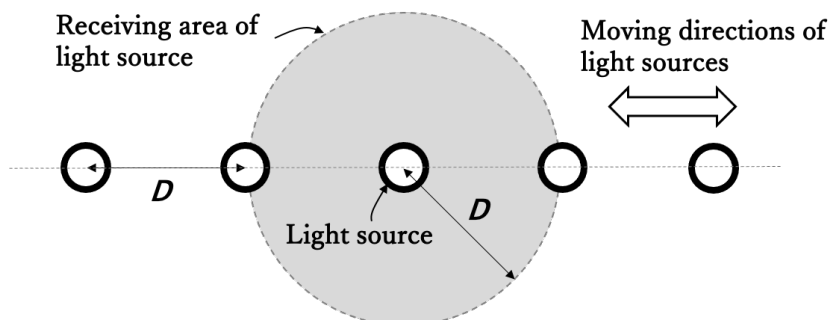
図のように直線上を無数の光源が一定の間隔 D を保って移動している。光は光源から放射状に広がり、受信機は光源から D の距離まで光を受信できるものとする。受信機は光源が並ぶ直線から距離 L だけ離れた平行な直線の上に一定の間隔 $D/2$ で固定されている。光源と受信機の大きさは無視する。



- (1) 1つの光源からの光を常に1つ以上の受信機で受信できる L の最大値を求めよ。
- (2) 1つの光源からの光を常に2つ以上の受信機で受信できる L の最大値を求めよ。

Q4

A myriad of light sources is arranged with the constant interval D and moves on a straight line as shown in the figure. Light spreads radially from a light source and a receiver can receive light within a distance D from a light source. Receivers are fixed at constant intervals $D/2$ on a straight line which is parallel to the straight line containing the light sources. The distance between the parallel lines is L .



Assume, the size of the light sources and receivers is negligible.

- (1) Find the maximum value of L , when the light from one light source can always be received by one or more receivers.
- (2) Find the maximum value of L , when the light from one light source can always be received by two or more receivers.

第4問 解答用紙 Q4 Answer sheet

第5問

重力によって落下し、空気抵抗を受ける物体を考える。初速 0 の物体に対し、下記の3つの場合において、落下速度の時間変化を求めよ。

- (1) 空気抵抗がない場合
- (2) 空気抵抗が物体の速さに比例する場合
- (3) 空気抵抗が物体の速さの2乗に比例する場合

3つの場合において落下速度のグラフを描き、それぞれを比較しながら考察しなさい。

Q5

Consider a falling object subject to gravity and air drag force. Find the time variations of the object's velocity with an initial velocity of 0 under the following three cases:

- (1) There is no drag force.
- (2) The drag force is proportional to the object's speed.
- (3) The drag force is proportional to the square of the object's speed.

Graph the object's velocity under the three cases. Then compare the curves and discuss their differences.

第5問 解答用紙 Q5 Answer sheet

第6問

投手と打者の間で行うあるゲームにおいて、以下のルールが成立しているとする。

- ・ 投手は打者に向かって勝ち負けが決まるまで球を投げる。
- ・ 投手が投げた球は一定の確率でストライクゾーン内に入る。
- ・ 打者は投げられた球に対してバットを振るか振らないかの選択ができる。
- ・ 打者は投げられた球に対してバットを振ると一定の確率で球を打ち返すことができる。
- ・ 打者はストライクゾーン内に投げられた球を打ち返すとその時点で勝ちとなる。
- ・ 打者はストライクゾーンから外れた球を打ち返しても勝ちとはならない。
- ・ 打者はストライクゾーンから外れた球に対して 4 回バットを振らないとその時点で勝ちとなる。
- ・ 打者は以下の 2 つの事象が合計 3 回起こると負けとなる。
 - a) ストライクゾーン内に投げられた球を打ち返せない。
 - b) ストライクゾーンから外れた球に対してバットを振る。

ある打者はバットを振って球を打ち返す確率が 2 割 5 分である。投手が投げた球がストライクゾーン内に入る確率が 5 割であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) この打者が全ての球に対してバットを振らずに勝つ確率を求めよ。
- (2) 全ての球に対してバットを振らないのと全ての球に対してバットを振るのとで、この打者が勝つ確率が高いのはどちらか、理由とともに答えよ。

Q6

A game is played between a pitcher and a batter with the following rules:

- ・ The pitcher throws balls towards a batter until the winner is determined.
- ・ Balls thrown enter the strike zone at a certain probability.
- ・ The batter can choose to swing or not to swing at balls thrown.
- ・ When the batter swings the bat, he/she will hit the balls thrown at a certain probability.
- ・ The batter wins if he/she successfully hits a ball thrown inside the strike zone.
- ・ The batter does not win if he/she hits a ball thrown out of the strike zone.
- ・ The batter wins if he/she does not swing the bat at the ball thrown out of the strike zone four times.
- ・ The batter loses if any combination of the following two conditions occurs three times:
 - a) The batter fails to hit a ball that enters the strike zone.
 - b) The batter swings a ball thrown out of the strike zone.

Answer the following questions, when the probability of the batter hitting a ball thrown is 25 % and the probability of the pitcher throwing a ball inside the strike zone is 50 %.

- (1) Obtain the probability for the batter to win by not swinging the bat at all balls thrown.
- (2) Which has a higher probability for the batter to win: not swinging the bat at all balls thrown or swinging the bat at every ball thrown? Answer with reasons.

受 験 番 号					

東京大学大学院新領域創成科学研究科 海洋技術環境学専攻
令和 5（2023）年度 B 日程大学院入学試験問題（修士課程・博士後期課程）
Department of Ocean Technology, Policy, and Environment
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo
Academic Year 2023 Schedule B Entrance Examination for Master's Course and Doctoral Course

専門科目

「専門基礎科目（論理的思考能力や数理的能力を問う問題）」

Specialized Subjects

“Fundamental Specialized Subject (Problems designed to evaluate logical thinking and basic mathematical skills)”

令和 5（2023）年 1 月 20 日（金）9:30～11:00（90 分）

January 20 (Fri), 2023 9:30～11:00（90min.）

注意事項 Notice

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
Do not open this test book until the start of the examination.
2. 対面受験者はこの表紙にも受験番号を記入しなさい。
Write your examinee number on this test book if you are an on-site examinee.
3. 問題は全部で 6 問あります。6 問全てに解答しなさい。
There are 6 questions in total. Answer all of the 6 questions.
4. 問題の解答の道筋と答を記入し、答を四角で囲みなさい。
Include your written derivation for your solution and enclose the answer in a box.
5. 対面受験者には計算用紙を別に配布する。
Sheets for calculation are distributed separately for on-site examinees.

オンライン受験者用 For online examinee

1. 解答は必ず受験者本人が作成し、問題と解答を他人に漏洩しないこと。
Answers must be prepared by the examinee him/herself and do not leak the written test questions and answers to others.
2. 一頁につき一問を解答すること。それぞれの解答用紙の左上に受験番号と解答する問題番号を記入しなさい。
Answer only one question per page. At the top left of each answer sheet, write your examinee's number and the corresponding question number.
3. 解答は指示に従ってアップロードすること。
Upload your answers according to the online instructions.

第1問

関数列 $\{f_n(x)\}$ が以下の式を満たすとする。ただし、以下の設問では m, n は自然数、 k_m, k_n は正の定数である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_n}{dx^2} + k_n^2 f_n(x) &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ f_n(x) &= 0, \text{ at } x = 0 \text{ and } x = 1 \end{aligned} \right\}$$

また、 I_{mn} を以下のように定義する。

$$I_{mn} = \int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx$$

- (1) $m \neq n, k_m \neq k_n$ の場合に I_{mn} を求めよ。
- (2) $\{f_n(x)\}$ の例を一つ挙げ、 $m = n$ の場合に I_{mn} を求めよ。

Q1

Suppose that a sequence of functions $\{f_n(x)\}$ satisfies the following equations where m and n are natural numbers and k_m and k_n are positive constants.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_n}{dx^2} + k_n^2 f_n(x) &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ f_n(x) &= 0, \text{ at } x = 0 \text{ and } x = 1 \end{aligned} \right\}$$

I_{mn} is defined as follows:

$$I_{mn} = \int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx$$

- (1) Obtain I_{mn} when $m \neq n$ and $k_m \neq k_n$.
- (2) Give an example of the sequence of function $\{f_n(x)\}$, and obtain I_{mn} when $m = n$.

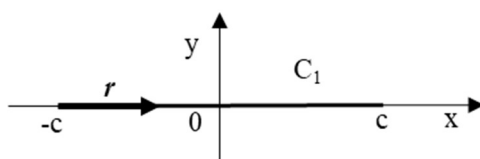
第 1 問 解答用紙 Q 1 Answer sheet

第2問

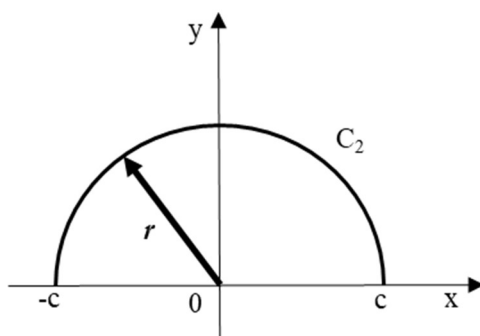
各問に示す積分路に沿って積分 I を求めよ。ただし、 $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ は直交する単位ベクトルの組、 a および b は任意の定数である。

$$I = \int_C (\mathbf{a}\mathbf{i} + \mathbf{b}\mathbf{j}) \cos(ax + by) \cdot d\mathbf{r}$$

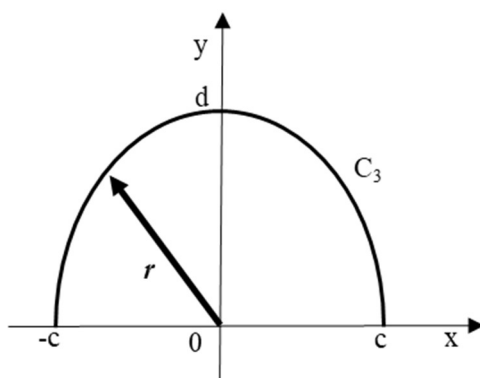
(1) 積分路 C_1 に沿って積分 I を求めよ。



(2) 積分路 C_2 に沿って積分 I を求めよ。ここで、 C_2 は半径 c の半円である。



(3) 積分路 C_3 に沿って積分 I を求めよ。ここで、 C_3 は短半径 c 、長半径 d の半楕円である。

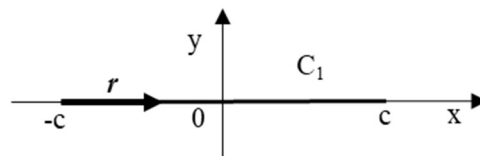


Q 2

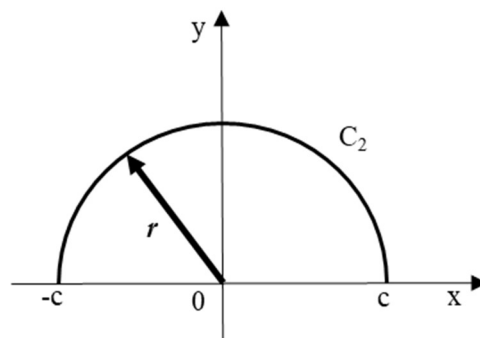
Find the following integral I using paths of integration indicated in each question where $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ is a set of orthogonal unit vectors, and both a and b are arbitrary constants.

$$I = \int_C (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cos(ax + by) \cdot d\mathbf{r}$$

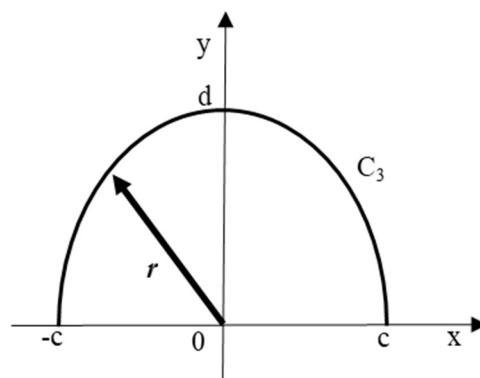
(1) Find the integral I along the path of integration C_1 .



(2) Find the integral I along the path of integration C_2 where C_2 is a semi-circle with a radius of c .



(2) Find the integral I along the path of integration C_3 where C_3 is a semi-ellipse with a semi-minor axis of c and a semi-major axis of d .



第 2 問 解答用紙 Q 2 Answer sheet

第3問

次の行列 A に対し A^k ($k = 1, 2, \dots$)を計算せよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Q3

For each matrix A given below, find A^k ($k = 1, 2, \dots$).

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

第 3 問 解答用紙 Q 3 Answer sheet

第 4 問

次の各問に答えよ。

- (1) 半径 r の円に内接する正 n 角形の周の長さ L を求めよ。
- (2) (1)の結果を用いて、円周率 π は3より大きいことを証明せよ。

Q 4

Answer the following questions.

- (1) Find the length of the circumference L of a regular n -sided polygon inscribed in a circle of radius r .
- (2) Using the result of (1), prove that the circular constant π is larger than 3.

第 4 問 解答用紙 Q 4 Answer sheet

第5問

あなたは太郎君とカードゲームをすることになった。各プレイヤーは4枚の異なるカードを持っていて、4枚のカードにはそれぞれスペード、ハート、クローバー、ダイヤのマークが1つずつ描いてある。ゲームのルールは以下の通り。

- 1回のゲームにおいて、プレイヤーは規定の回数のセットを行う。セット毎に、プレイヤーは4枚のカードから1枚を同時に出し合う。
- 各セットにおける点数は以下のように与えられる。
 - スペードはクローバーとダイヤに勝つ
 - ハートはスペードに勝つ
 - クローバーはハートに勝つ
 - ダイヤはクローバーとハートに勝つ
 - クローバーで勝ったプレイヤーは2点を得る
 - スペード、ハート、ダイヤで勝ったプレイヤーは1点を得る
 - 勝ち以外は0点とする
- 1回のゲームの間、各プレイヤーの点数は加算される。
- 先に2点以上取ったプレイヤーをゲームの勝者とする。
- セットを規定の回数行っても誰も2点以上を取れなかった場合、ゲームの勝者はなしとする。

太郎君はセット毎に4枚のカードのいずれかを等しい確率で出すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) セットの規定回数が2回で、あなたは2回とも同じカードを出すものとする。このとき、あなたがゲームの勝者となる確率を最大にするにはどのカードを出すべきか。
- (2) セットの規定回数が3回で、あなたは(1)で答えたカードを3回とも出し続けるものとする。このとき、あなたがゲームの勝者となる確率を求めよ。

Q 5

You are going to play a card game with Taro. Each player has 4 different cards, and each card is marked with either a Spade, a Heart, a Club, or a Diamond. The rule is as follows.

- In one game, players play a prescribed number of sets. For every set, players disclose one of their four cards at the same time.
- Each set is scored as follows:
 - Spade beats Club and Diamond.
 - Heart beats Spade.
 - Club beats Heart.
 - Diamond beats Club and Heart.
 - A player winning a set with a Club gets 2 points.
 - A player winning a set with a Spade, a Heart, or a Diamond gets 1 point.
 - Players do not earn points unless they win the set.
- Player's points accumulate during a game.
- The first player to get 2 or more points wins the game.
- If the prescribed number of sets are played and no player gets 2 or more points, there is no winner of the game.

For each set, suppose Taro discloses a card with equal probability between the four cards. Answer the following questions.

- (1) Suppose the prescribed number of sets is two and you must disclose the same card in both sets. Which card should you disclose to maximize the probability to win the game?
- (2) Suppose the prescribed number of sets is three, find the probability to win the game when you disclose the same card you chose in question (1) in all three sets.

第 5 問 解答用紙 Q 5 Answer sheet

第 6 問

各面に 1 から 6 までの数字が記載されているサイコロがある。サイコロを振った時に各数字が出る確率は等しいとして、次の確率を求めよ。ただし、 N 、 M は正の整数であり、 $2 < N$ 、 $N/2 < M < N$ の条件を満たすものとする。

- (1) N 回サイコロを振って、同じ数字が合計で N 回出る確率
- (2) N 回サイコロを振って、同じ数字が合計で M 回出る確率
- (3) N 回サイコロを振って、同じ数字が合計で M 回出て、かつ M 回続けて出る確率

Q 6

Given a standard dice with each of its six faces marked with a different number from one to six. Assuming each of the six numbers shows up with equal probability when the dice is thrown, find the following probabilities. Note that N and M are positive integers and satisfy the conditions: $2 < N$ and $N/2 < M < N$.

The probabilities that

- (1) the same number shows up N times in total when the dice is thrown N times.
- (2) the same number shows up M times in total when the dice is thrown N times.
- (3) the same number shows up M times in total and in M consecutive throws when the dice is thrown N times.

第 6 問 解答用紙 Q 6 Answer sheet

